环 境 遥 感
第9卷 第4期 REMOTE SENSING OF ENVIRONMENT Vol. 9. No. 4
1994年11月 CHINA Nov., 1994

概括模型下的线性2^m叉树的自然数编码*

方 涛 郭达志
(中国矿业大学 徐州 221008)

摘 要 本文在讨论线性四叉树和线性八叉树的自然数编码的基础上，给出了线性 2^m 叉树的自然数编码的公式。

关键词 线性 2^m 叉树，自然数编码，数据结构

1 引言

二维数据的四叉树编码和三维数据的八叉树编码可直接进行大量的图形图像运算，并且具有较高的数据压缩效率，已在图像处理和模式识别、计算机图形学、地理信息系统（GIS）等领域中得到广泛的应用。

一个好的压缩编码方法应具有在尽可能减少运算时间的基础上达到最大的数据压缩效率，而且算法适应性强，易于实现等优点。常规的四叉树是面向指针结构的，大量的冗余结点和指针占用较大的存储空间且其空间查找，变换都比较麻烦，于是人们提出了线性四叉树的概念，依据 Morton 函数建立了四进制的线性四叉树的编码方法[1,2]

由于采用自顶向下的常规四叉树分割方法产生 Morton 码，需要大量的重复检测运算；而采用自底向上的合并运算时也存在先要对 Morton 码排序操作很费机时等缺陷。文献[2]提出了基于十进制的线性四叉树自然数编码。

对一幅 $2^n \times 2^n$ 的二维图像，行号 II 转换为伪码[2]:

$$I_f = \sum_{k=0}^{n-1} MOD(I_k, 2) \cdot 4^k \tag{1}$$

其中，当 $k = 0$ 时，$I_k = II$；当 $k > 0$ 时，$I_k = INT(I_{k-1}/2)$。

同样列号 JJ 按上式取余迭代累加可得到 J_f，于是基于十进制的 Morton 码(将基于自然数的M码用N表示，下同):

$$N = 2 \times I_f + J_f \tag{2}$$

图像恢复时，通过逆变换可将N码转换为十进制表示的行、列号:

$$II = \sum_{k=n-1}^{k=0} INT(T_k/2) \cdot 2^k \tag{3}$$

$$JJ = \sum_{k=n-1}^{k=0} MOD(T_k, 2) \cdot 2^k$$

* 国家自然科学基金资助项目

收稿日期：1994年4月22日；收到修改稿日期：1994年5月30日

其中 $T_k = INT(N_k/4^k)$；当 $k < n-1$ 时，$N_k = MOD(N_{k+1}, T_k \cdot 4^k)$；当 $k = n-1$ 时，$N_k = N$。

人们在研究三维图像时，以四叉树为基础提出了八叉树和线性八叉树的数据结构。作为一个四维图像的时变三维目标，也可以用线性十六叉树表达。随着四叉树和八叉树研究的不断深入和目标维数的增加，为了提高存储效率和运算速率，本文给出了线性 2^m 叉树的自然数编码的通用式，不仅是理论研究的需要，也是实际应用的需要。

2　线性四叉树和线性八叉树的自然数编码

为了便于给出线性 2^m 叉树自然数编码的通式，对文献[2]中的线性四叉树的自然数编码的迭代公式进行了改进。

2.1　线性四叉树的自然数编码

$$N = 2^0(d_0 4^0 + d_1 4^1 + \cdots + d_{n-1} 4^{n-1}) + 2^1(c_0 4^0 + c_1 4^1 + \cdots + c_{n-1} 4^{n-1}) \tag{4}$$

式中 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 和 $d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}$ 分别是行号和列号二进制化后由低位到高位的权。

图像恢复时，由 N 码经逆变换为十进制的行、列号：

$$I_1 = \sum_{k=n-1}^{k=0} MOD(T_k, 2) \cdot 2^k \tag{5}$$

其中 $T_k = INT(N_k/4^k \cdot 2)$；当 $k < n-1$ 时，$N_k = MOD(N_{k+1}, T_{k+1} 4^{k+1} \cdot 2)$；当 $k = n-1$ 时，$N_k = N$。

$$I_2 = \sum_{k=n-1}^{k=0} MOD(T_k, 2) \cdot 2^k \tag{6}$$

其中 $T_k = INT(N_k/4^k)$；当 $k < n-1$ 时，$N_k = MOD(N_{k+1}, T_{k+1} \cdot 4^{k+1})$；当 $k = n-1$ 时，$N_k = N$。

2.2　线性八叉树的自然数编码

$$N = 2^0(c_0 8^0 + c_1 8^1 + \cdots + c_{n-1} 8^{n-1}) + 2^1(d_0 8^0 + d_1 8^1 + \cdots + d_{n-1} 8^{n-1}) + 2^2(e_0 8^0 + e_1 8^1 + \cdots + e_{n-1} 8^{n-1}) \tag{7}$$

当图像恢复时，可进行逆变换：

$$I_1 = \sum_{k=n-1}^{k=0} MOD(T_k, 2) \cdot 2^k \tag{8}$$

其中 $T_k = INT(N_k/8^k)$；当 $k < n-1$ 时，$N_k = MOD(N_{k+1}, T_{k+1} \cdot 8^{k+1})$；当 $k = n-1$ 时，$N_k = N$。

$$I_2 = \sum_{k=n-1}^{k=0} MOD(T_k, 2) \cdot 2^k \tag{9}$$

其中 $T_k = INT(N_k / 8^k \cdot 2)$；当 $k < n-1$ 时，$N_k = MOD(N_{k+1}, T_{k+1} \cdot 8^{k+1} \cdot 2)$；当 $k = n-1$ 时，$N_k = N$。

$$I_3 = \sum_{k=n-1}^{k=0} MOD(T_k, 2) \cdot 2^k \tag{10}$$

其中 $T_k = INT(N_k / 8^k \cdot 2^2)$；当 $k < n-1$ 时，$N_k = MOD(N_{k+1}, T_{k+1} 8^{k+1} \cdot 2^2)$；当 $k = n-1$ 时，$N_k = N$。

3　线性 2^m叉树自然数编码及其收敛性分析

根据以上的推导,可以得到线性 2^m 叉树自然数编码的一般公式：

$$N = \sum_{i=1}^{m} 2^{i-1} \sum_{k=0}^{n-1} MOD(I_{i_k}, 2) \cdot (2^m)^k \tag{11}$$

其中

$$I_{i_k} = INT(I_{i(k-1)}/2) \quad (k > 0)$$

式中 m 为研究目标的维数，I_{i_k} 是 m 维欧氏空间中第 i 个坐标轴的十进制坐标。

我们知道图像分辨率 n 决定了栅格坐标大小，在(11)式中给出了二进制化的最大取余迭代次数就是图像分辨率大小。而在同一图像分辨率下，m 维欧氏空间中不同的坐标取余迭代收敛次数：

$$n' = INT(\log_2 I_{i0}) + 1 \tag{12}$$

表明取余迭代速度是由坐标 I_{i0} 决定的,因此线性 2^m 叉树自然数编码的实用公式：

$$N = \sum_{i=1}^{m} 2^{i-1} \sum_{k=0}^{INT(\log_2 I_{i0})} MOD(I_{i_k}, 2) \cdot 2^{mk} \tag{13}$$

其中

$$I_{i_k} = INT(I_{i(k-1)}/2) \quad (k > 0)$$

m 维图像恢复时,进行逆变换：

$$I_i = \sum_{k=n-1}^{k=0} MOD(T_k, 2) \cdot 2^k \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{14}$$

其中　$T_k = INT(N_k/(2^m)^k \cdot 2^{i-1}) = INT(N_k / 2^{mk+i-1})$

当 $k < n-1$ 时,$N_k = MOD(N_{k+1}, T_{k+1} \cdot (2^m)^{k+1} \cdot 2^{i-1}) = MOD(N_{k+1}, T_{k+1} \cdot 2^{mk+m+i-1})$；当 $k = n-1$ 时，$N_k = N$。

同样,为了提高逆变换式(14)取余迭代收敛速度,应先确定 k 的取余迭代初始值，即在满足条件

$$\frac{N}{2^{mk+i-1}} \geqslant 1 \tag{15}$$

有
$$K = INT\left[\frac{1}{m}(\log_2 N + 1 - i)\right] \tag{16}$$

因此实用时,式(14)中 k 的初值用(16)式取代。

利用式(14)和式(16)进行图像恢复的逆变换时，取余迭代是否在 $k = 0$ 处收敛呢?很明显要满足

$$MOD(T_k, 2) \equiv 0 \tag{17}$$

恒成立,于是有 $mk + i - 1 \leqslant -1$。即

$$k \leqslant -\frac{i}{m} \quad (1 \leqslant i \leqslant m) \tag{18}$$

只有当 $i = m$ 时，$k \leqslant -1$。因此在取余迭代式(14)中，I_i 值一定会在 $k = 0$ 处收敛。

4 一个时空复合的例子

利用多时相(或多波段)遥感图像信息匹配复合，提取反映同区域地应力场变化的影像特征信息，来研究和探测地应力场的动态变化就是一个一维时间空间和三维影像空间复合形成四维的时空数据模型(图 1)。

按上述公式可将四维时空坐标系中每个超体素的时空位置转换为线性 2^4 叉树自然数编码,如位于(1,3,0,1)处的超体素的编码 $N = 43$。这样十进制的自然数编码 N 自然地对应一维数组下标，四维图像超体素合并运算时，依次将数组中 2^4 个相邻元素进行合并操作。四维图像恢复时，利用上述逆变换为 4 个坐标值。

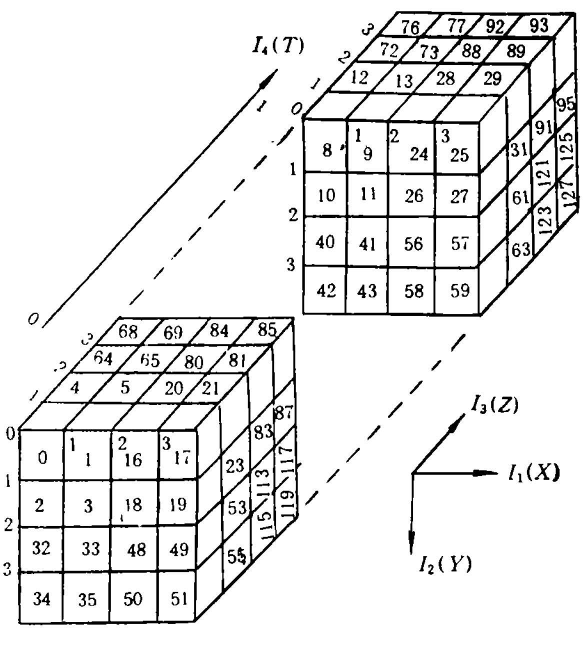

图 1 线性十六叉树自然数编码 ($n = 2$)

Fig. 1 The Natural Digit Coding of Linear 2^4-Tree

因此，可以看出，线性 2^m 叉树自然数编码在数据压缩节省存储量，提高存储和处理效率上显示出愈来愈多的优越性。

参　考　文　献

[1] 李树祥．Q码与图象表达．国防科技大学学报．1987，No. 2，96—101．
[2] 龚健雅．一种基于自然数的线性四叉树编码．测绘学报．1992，No. 2，90—99．

A Natural Digit Coding of Linear 2^m-Tree on General Model

Fang Tao　Guo Dazhi

(China University of Mining and Technology)

Abstract Based on discussion on linear quadtreeuand linear octree. The formula of the natural digit coding of linear 2^m-tree is proposed.

Key words Linear 2^m-tree, Digit Coding, Data Structure